ROMÂNIA
MINISTERUL APĂRĂRII NAȚIONALE

COLEGIUL NAȚIONAL MILITAR
„Alexandru Ioan Cuza”

ȘCOALA GIMNAZIALĂ
„ALEXANDRU CIUCURENCU”
TULCEA

Concursul de Matematică „ VICEAMIRAL VASILE URSEANU”
Ediția a XXX-a, 25 noiembrie 2023

Partea întâi. Pe foaia de examen se va trece numărul itemului și respectiv unica variantă de răspuns corectă, aferentă fiecărui item...$9x6 = 54p$

<table>
<tr><td colspan="4">1. Valoarea numărului real m pentru care avem egalitatea: $\frac{\sqrt{3}^3-9+m}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^3-3(\sqrt{3}+1)^2+m}{\sqrt{3}}$, este</td></tr>
<tr><td>A. $11-3\sqrt{3}$</td><td>B. $11+3\sqrt{3}$</td><td>C. $-7+7\sqrt{3}$</td><td>D. $7-7\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Aria trapezului dreptunghic ortodiagonal cu bazele de 5 respectiv 20 cm este:</td></tr>
<tr><td>A. $62{,}5cm^2$</td><td>B. $100cm^2$</td><td>C. $125cm^2$</td><td>D. $50cm^2$</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Se consideră numerele A=$1\cdot 2+3\cdot 4+\cdots+2017\cdot 2018$ și $B=1^2+3^2+5^2+\cdots+2017^2$. Numărul natural N, pentru care $N^2=A-B$ este egal cu:</td></tr>
<tr><td>A. 0</td><td>B. 1009</td><td>C. 2017</td><td>D. 2018</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. Fie a$\neq 3, b\neq 4, c\neq 5$, numere raționale astfel încât $\frac{6}{a-3}+\frac{12}{b-4}+\frac{18}{c-5}=2025$. Valoarea numărului $p=\frac{a-1}{a-3}+\frac{2b-4}{b-4}+\frac{3c-9}{c-5}$ este:</td></tr>
<tr><td>A. 681</td><td>B. 680</td><td>C. 675</td><td>D. 670</td></tr>
<tr><td colspan="4">5. Se dă triunghiul MNP cu MN=21, MP=28, NP=35. Media geometrică dintre raza cercului circumscris triunghiului și raza cercului înscris în triunghiul MNP este:</td></tr>
<tr><td>A. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$</td><td>B. $\frac{7\sqrt{10}}{2}$</td><td>C. $\frac{10\sqrt{2}}{7}$</td><td>D. $\frac{2\sqrt{10}}{7}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">6. Fie ABCD trapez isoscel cu AB // CD, $AB>CD, AC\perp$ BC , DC=8 cm, $\measuredangle$ADC=120^0. Perimetrul trapezului este:</td></tr>
<tr><td>A. $30\ cm$</td><td>B. $32\ cm$</td><td>C. $35cm$</td><td>D. $40cm$</td></tr>
<tr><td colspan="4">7. Dacă $(a+2)^2+(b-5)^2-4=0$ $și\ c=\sqrt{\frac{0,(3)+8,(6)+1}{0,0(6)-0,0(5)}}$, a,b,c numere naturale, atunci:</td></tr>
<tr><td>A. $c\le a\le b$</td><td>B. $a\le c\le b$</td><td>C. $b\le a\le c$</td><td>D. $a\le b\le c$</td></tr>
<tr><td colspan="4">8. Numerele naturale n cu proprietatea că 10 divide numărul:
$1980^n+1981^n+\cdots+1986^n+1987^n$, sunt de forma</td></tr>
<tr><td>A. n=4k, $k\in N$</td><td>B. n=4k+1, $k\in N$</td><td>C. $n=4k+2, k\in N$</td><td>D. n=4k+3, $k\in N$</td></tr>
<tr><td colspan="4">9. Fie triunghiul ABC ascuțitunghic și M,N,P picioarele înălțimilor duse din A,B respectiv C. Știind că H este ortocentrul triunghiului ABC și unghiurile $\measuredangle$AHN și $\measuredangle$ CHN sunt direct proporționale cu 7 și 13 și $\measuredangle$ BHM+2($\measuredangle$ CHM)=195^0 , cel mai mic dintre unghiurile triunghiurilor ABC este egal cu:</td></tr>
<tr><td>A. 30^0</td><td>B.25^0</td><td>C. 35^0</td><td>D. 40^0</td></tr>
</table>

Partea a doua. Pe foaia de examen scrieți rezovările complete…………..................…..$6x6 = 36p$

1. a) Arătați că $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$ pentru orice n număr natural nenul.

b) Arătați că numărul $\sqrt{\sqrt{1}+\sqrt{1+3}+\sqrt{1+3+5}+\cdots+\sqrt{1+3+5+\cdots 1921}+961\cdot 480}$ este pătrat perfect.

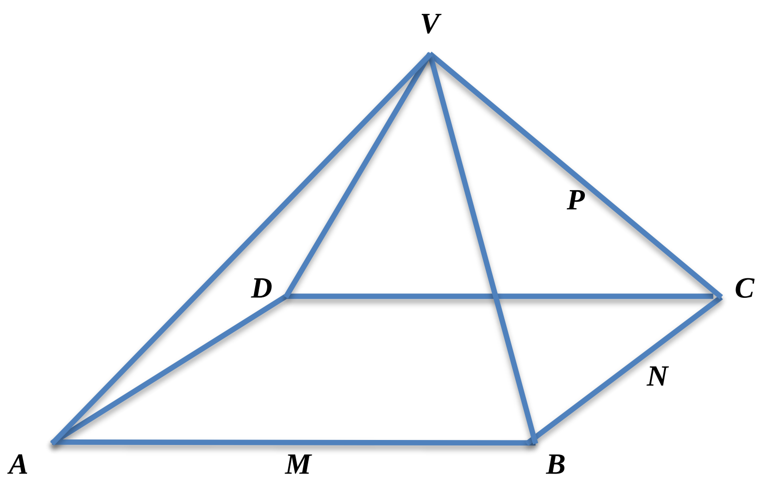
c) Arătați că $\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+\cdots+\frac{1}{1+3+5+\cdots+(2n-1)} \in (0,1)$

2. Se dă piramida patrulateră regulată VABCD cu M mijlocul lui AB și N mijlocul lui BC, iar MN=1 cm. Știind că suma muchiilor laterale este 8:

a) Aflați unghiul dintre dreptele VB și MN.

b) Dacă BE este bisectoarea unghiului $\measuredangle ABV$, E ∈ VA, calculați distanța de la E la latura VB.

c) Fie P mijlocul lui VC. Determinați poziția punctului T∈ (DC) pentru care suma AT+TP să fie minimă.



Timp de lucru 2 ore

Se acordă 10 puncte din oficiu

BAREM DE CORECTARE

PARTEA ÎNTÂI

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
C	C	B	A	B	D	D	C	C

PARTEA A DOUA

1a.	$(2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1)+\cdots..(2n-1)=$ $=2(1+2+3+\cdots+n)-n=$ $2n(n+1):2-n=$ $=n^2+n-n=n^2$	**1p** **2p** **2p** **1p**
b.	$\sqrt{1+2+3+\cdots+961+961\cdot 480}=$ $\sqrt{961\cdot 962:2+961\cdot 480}$=$\sqrt{961\cdot 481+961\cdot 480}=\sqrt{961\cdot(481+480)}=$ $\sqrt{961\cdot 961}=961=31^2$	**2p** **2p** **2p**
c.	$0<\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3+5}+\frac{1}{1+3+5+7}+\cdots+\frac{1}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<$ $<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=$ $=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n}<1$	**2p** **2p** **2p**
2a.	MN=1 $\Rightarrow AC=2\Rightarrow AB=\sqrt{2}, VA=2$,VO$\sqrt{3}$ MN$\cap BO=\{Q\}$, QR // VB, R $\in VO$, QR l.m în triunghiul VBO$\Rightarrow$ QR// VB și $QR=1, QM=\frac{1}{2}$, , MR=$\frac{\sqrt{5}}{2}$ RTP=> *triunghiul MQR dreptunghic* $\measuredangle$ (MN;VB)= $\measuredangle$(QR,MN)= $\measuredangle$MQR=90^0	**1p** **2p** **2p** **1p**
b.	BE bisec $\measuredangle$VBA $\Rightarrow$T bisec: $\frac{VE}{EA}=\frac{VB}{BA}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{VA}{EA}=\sqrt{2}+1\Rightarrow$ $AE=\frac{2}{\sqrt{2}+1}$=$2\sqrt{2}-2$ d(E,VB)=d(E,AB)=EL, L$\in AB$, EL// VM și $\frac{VM}{EL}=\frac{VA}{AE},\frac{\frac{\sqrt{14}}{2}}{EL}=\frac{VA}{EA}=\frac{2}{2\sqrt{2}-2}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=$ $\sqrt{2}+1\Rightarrow EL=\frac{\sqrt{7}(2-\sqrt{2})}{2}$	**3p** **3p**
c.	AT+TP minim desfășuram in plan baza ABCD și fața VDC $\Rightarrow$ *A, T, P coliniare* Fie PF $\perp$ DC, F$\in$ DC, PF=$\frac{\sqrt{14}}{4}$ Triunghiul dreptunghic PFC $\Rightarrow T.P\ FC=\sqrt{1-\frac{14}{16}}$=$\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\Delta\mathrm{ADT}\sim\Delta\mathrm{PTF(U.U)}\Rightarrow\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{DA}}=\frac{TF}{DT}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{14}}{4}}{\sqrt{2}}=\frac{TF}{DT}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{14}}{4}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{DF}{DT}\Rightarrow$ $\frac{\sqrt{7}}{4}+1=\frac{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}}{DT}\Rightarrow DT=\frac{\sqrt{2}(4-\sqrt{7})}{3}$	**2p** **1p** **3p**